# Betekenisgewing: 'n Noodsaaklikheid vir effektiewe leer van Wiskunde

**Author:**
Gabriël F. du Toit[1]

**Affiliation:**
[1]Program director, Initial Teacher Education, Faculty of Education, University of the Free State, South Africa

**Correspondence to:**
Gawie du Toit

**Email:**
dutoitgf@ufs.ac.za

**Postal address:**
Harry Smithstraat 37, Dan Pienaar, Bloemfontein 9301, South Africa

**Dates:**
Received: 31 May 2012
Accepted: 17 Sept. 2012
Published: 20 Nov. 2012
Republished: 19 Dec. 2012

**How to cite this article:**
Du Toit, G.F., 2012, 'Betekenisgewing: 'n Noodsaaklikheid vir effektiewe leer in Wiskunde', *Suid-Afrikaanse Tydskrif vir Natuurwetenskap en Tegnologie* 31(1), Art. #354, 7 pages. http://dx.doi.org/10.4102/satnt.v31i1.354

**Note:**
An updated version of this article has been republished.



Die artikel ondersoek die verskynsel van hoekom effektiewe leer nie altyd in Wiskunde en, meer spesifiek, in Algebra op skool verwesenlik word nie. In 'n poging om te verstaan hoekom leerders nie effektief leer nie, is 'n narratiewe ondersoek uitgevoer op toekomstige onderwysers (studente) wat vir 'n Wiskundeonderwyskursus geregistreer is en op onderwysers wat verder in Wiskundeonderwys wil studeer. Hierdie narratiewe ondersoek beoog ook om die navorser se ondervindings van verskeie struikelblokke in die aanbieding van Wiskundeonderwys bekend te maak en om insigte vanuit die navorser se persoonlike besinnings te lewer. Die uitkomste word vergelyk met moontlike redes soos weergegee in die literatuur. Die deelnemers se antwoorde word bespreek deur hul reaksies op sommige van die vrae te analiseer.

**Sense-making: A necessity for effective learning of Mathematics**. This article examines the phenomenon of why effective learning does not always materialise in Mathematics and, more specifically, in Algebra at school level. In an attempt to understand why effective learning evades learners, a narrative inquiry was conducted on future teachers (students) enrolled for a Mathematics education course as well as on teachers furthering their studies in Mathematics education. Such narrative inquiry also aims to make known the researcher's experience of the various obstacles encountered in the teaching of Mathematics education and to offer insights afforded by the researcher's personal reflections. The outcomes are compared with possible reasons as portrayed in literature. The participants' responses are discussed by analysing their responses to some of the questions posed to them.

## Inleiding

Ek het hierdie artikel geskryf na aanleiding van my betrokkenheid by die opleiding van voornemende Wiskundeonderwysers asook indiensopleiding van Wiskundeonderwysers. Met die aanbieding van klasse en/of werkswinkels het ek opnuut besef dat beide studente en praktiserende onderwysers nie oor voldoende vakfeitlike kennis in die Wiskunde beskik nie. In die geval van praktiserende onderwysers kan dié leemte moontlik verklaar word deur die afwesigheid van vakfeitlike kennis in die kollege-opleiding wat hulle ondergaan het om te kwalifiseer as onderwyser. Die Wiskunde waaraan die studente in kolleges blootgestel was, was meestal niks meer as graad 12-Wiskunde nie. Meer kommerwekkend is die gebrek aan insig en die afwesigheid van betekenisgewing aan wiskundige konsepte deur studente wat Wiskunde op universiteit as vak aangebied het. Hierdie waarnemings het my gedwing om te besin oor die verskynsels. Ek het selfstudie aangewend om my persoonlike perspektiewe oor die verskynsels te staaf en te beskryf met die hoop dat dit waarde sal toevoeg tot die opleiding van studente en diensdoende onderwysers in Wiskunde (Craig 2006, 2008).

## Konseptuele raamwerk: Effektiewe leer van Wiskunde

Die onderrig van Wiskunde om effektiewe leer te laat plaasvind, bied steeds 'n groot uitdaging aan onderwysers. Verskeie faktore word aangevoer wat die effektiewe leer van Wiskunde positief of negatief kan beïnvloed: die rol van die onderwyser; die vertrouesisteem van leerders wat beïnvloed word deur hul siening van Wiskunde; die onderrigmetodes wat in die Wiskundeklaskamer aangewend word; onderrigmateriaal soos byvoorbeeld handboeke (foutiewe inhoud; wyse waarop die inhoud verpak is; ensovoorts) wat gebruik word in die onderrig van Wiskunde.

Vervolgens word effektiewe leer asook die verbintenis met konstruktiwisme as verwysingsraamwerk bespreek. Verder word ondersoek ingestel na die rol van die digotomie tussen algoritmes en heuristiek; prosedurele en konseptuele kennis; induktiewe en deduktiewe redenering, asook konsepdefinisie en konsepbeeld.

## Effektiewe leer

De Corte en Weinert (1996) het ’n reeks eienskappe geïdentifiseer wat effektiewe en betekenisvolle leer tipeer. Hierdie eienskappe word as boublokke van ’n opvoedkundige leerteorie gesien. Daar bestaan ’n breë konsensus in die literatuur oor hierdie eienskappe wat in die volgende definisie van effektiewe leer saamgevat kan word:

> Leer is ’n konstruktiewe, kumulatiewe, self-regulerende, doelgerigte, gesitueerde, samewerkende en indiwidueel verskillende proses van betekenisgewing en kennisbouing. (De Corte & Weinert 1996:35–37)

Die beginsels van konstruktiewe onderrig (Muijs & Reynolds 2005) is verwant aan die genoemde beginsels van effektiewe leer wat dus perfek in die raamwerk van sosiale konstruktiwisme inpas.

Verskeie outeurs (Cobb 1988; Hiebert & Lefevre 1986; Nieuwoudt 1989; Schoenfeld 1988) wys daarop dat navorsing aantoon dat onderwysers goeie doelstellings kan formuleer, maar dat daar nogtans steeds kernprobleme in die onderrig van Wiskunde voorkom. Die volgende kernprobleme word in die literatuur uitgelig; naamlik, (1) leerders word nie deur onderwysers gesien as konstrueerders van eie kennis nie; (2) leerders kan nie prosedures wat te make het met die manipulering van simbole met die werklikheid verbind nie; (3) leerders aanvaar metodes van die onderwyser sonder enige kritiek en pas dit net so toe; (4) die antwoord word oorbeklemtoon, wat daartoe lei dat divergente denkaktiwiteite onderdruk word en (5) kreatiwiteit en probleemoplossingstrategieë dus nie gevestig word nie. Hierdie kernprobleme tesame met die redes wat daartoe aanleiding gee, werk negatief in op effektiewe leer.

## Algoritmes en heuristiek

Suydam (1980) onderskei tussen algoritmes en heuristiek as twee moontlike metodes wat aangewend kan word in die oplos van Wiskundeprobleme. Die herhaling van ’n bepaalde prosedure waarvolgens ’n gegewe soort probleem binne ’n eindige aantal meganiese stappe opgelos word, staan bekend as ’n algoritme (Borowski & Borwein 1989:13). Heuristiek daarteenoor bestudeer metodes en reëls van ontdekking en uitvinding. Selfontdekking speel ’n belangrike rol in die metode van probleemoplossing (Pólya 1985:112–113; Schultze 1982:44–45). Heuristiese metodes is nie rigiede raamwerke of vaste prosedures wat die verkryging van ’n oplossing waarborg nie. Die waarde van heuristiese metodes is geleë in die doelgerigte en sistematiese soeke na ’n oplossing (De Villiers 1986).

Daar is ’n duidelike verskil tussen die twee metodes van probleemoplossing. Algoritmes verseker byvoorbeeld die suksesvolle oplossing van ’n probleem indien die toepaslike algoritme gekies en korrek toegepas word. Algoritmes is probleemspesifiek terwyl heuristiek die kombinasie van verskeie strategieë behels en dus nie probleemspesifiek is nie. Heuristiek kan aangewend word om die oplossing van enige probleem te probeer vind, maar die metode verseker nie noodwendig sukses nie. Algoritmes weer verskaf die ‘padkaart’ oftewel die bloudruk wat tot die oplossing van ’n sekere probleemsituasie sal lei (Krulik & Rudnick 1984).

Schoenfeld (1985) belig die belangrikheid van die heuristiese metode as riglyn vir die soeke na die oplossing van relatief onbekende probleme, maar stel kategories dat dit nie vakinhoudelike kennis kan vervang nie. Heel dikwels is die suksesvolle toepassing van ’n heuristiese strategie gebaseer op spesifieke vakinhoudelike kennis. Binne ’n sosiaal-konstruktiwistiese onderrig-leeromgewing, waar probleemoplossing die fokus is, behoort die heuristiese metode ’n ál belangriker rol te speel. Dit negeer egter nie die belangrikheid van ’n algoritme as metode in die soeke na oplossings van probleme in Wiskunde nie. Die oplossing van ’n probleem wat heuristies gevind is, word soms vergestalt in die formulering van ’n algoritme. Algoritmes is dus die uitkoms van die proses van algoritmatisering, wat ’n heuristiese proses is. Algoritmes wat so deur leerders ‘ontdek’ is, vorm nou deel van die Wiskunde-inhoudskennis van die leerder.

Heuristiese strategieë soos die skets van ’n diagram moet nie as sodanig onderrig word nie, maar moet waar nodig aangewend word om ’n probleem op te los. Heuristiese strategieë is nie op sigself die doel van Wiskundeonderrig nie, maar is eerder ’n wyse waarop die doel bereik kan word (Schoenfeld 1988). Die waarde van die gebruik van heuristiese strategieë (ook bekend as probleemoplossingstrategieë) lê in die selfbemagtiging van leerders wat in staat is om ’n reeks probleemoplossingstrategieë aan te wend om ’n probleem op te los. Aan die hand van hierdie strategieë verkry leerders beheer of kontrole oor die proses van probleemoplossing en behoort hulle die strategieë spontaan en onafhanklik van die onderwyser toe te pas (Groves & Stacey 1988; Roux 2009).

## Prosedurele en konseptuele kennis

Verskeie skrywers is van oordeel dat studente en ook sommige praktiserende onderwysers, beperkte konseptuele kennis van Algebra het en dat hierdie kennis ook nie korreleer met die prosedurele kennis waaroor die leerders en onderwysers beskik nie (O’Callaghan 1998; Hollar & Norwood 1999; Roux 2009). Prosedurele kennis fokus op die ontwikkeling van vaardighede en is meer verwant aan die gebruik en toepassing van algoritmes (O’Callaghan 1998). Konseptuele kennis word daarteenoor getipeer deur kennis wat ryk is aan die verwantskap tussen veranderlikes en ook deur die vermoë om tussen verskillende voorstellingsvorme van funksies (soos byvoorbeeld tabelle en grafieke) te beweeg (Hiebert & Lefevre 1986). Konseptuele kennis is nouer aan selfontdekking verwant, met die gevolg dat dit eerder aan die gebruik van heuristiek en induktiewe asook deduktiewe strategieë gekoppel is.

Troutman en Lichtenberg (1995) voer aan dat ontwikkeling, vaslegging, dril en oefen asook probleemoplossing algemeen in die onderrig en leer van Wiskunde voorkom. In die ontwikkeling van konsepte word gesteun op ontwikkelingsen probleemoplossingsaktiwiteite. Vasleggings- asook dril-en-oefen-aktiwiteite word weer aangewend in die ontwikkeling van prosedurele kennis. Dit is dus duidelik dat dit voordelig is om leerders eers aan ontwikkelings- en probleemoplossingsaktiwiteite bloot te stel sodat hulle uitgedaag word om eers konseptuele kennis te ontwikkel voordat hulle aan prosedurele kennis blootgestel word (Davis 2005).

### Konsepdefinisie en konsepbeeld

Vinner (1991, 1992) onderskei tussen ʼn *konsepdefinisie* as verbale entiteit en ʼn *konsepbeeld* as nie-verbale entiteit. Op grond van hul blootstelling aan aktiwiteite in die Wiskundeklas, ontwikkel leerders ʼn verstandsvoorstelling van ʼn konsep. Leerders wat konsepbeelde ontwikkel deur betekenis daaraan te gee, het ʼn nuwe konsep geleer. In die proses word kennisnetwerke gevorm. Heel logies sal onvoldoende netwerke wanvoorstellings van konsepdefinisies tot gevolg hê.

Die bloot meganiese toepassing (gebruik van algoritme sonder begrip) van ʼn prosedure kan die betekenis wat leerders aan ʼn konsep gee, beperk. Die uitvloeisel hiervan is ʼn versteurde konsepbeeld. Hierdie vakdidaktiese werkswyse is een van die kernprobleme in die onderrig van Wiskunde wat vroeër in hierdie artikel aangespreek is. As daar van leerders verwag word om kennis te bou (konstrueer) deur betekenis daaraan te gee, moet die onderrig ondersteunend daartoe bydra. Die ideaal blyk te wees om konsepbeelde te bou deur induktief te werk te gaan en daarna deduktief om die konsepdefinisie te formaliseer. Die volgende aanhaling (Pólya 1985:vii) ondersteun die gedagte: ʻMathematics presented in the Euclidian way appears as a systematic, deductive science; but mathematics in the making appears as an experimental, inductive science.ʼ [*Wiskunde wat op die Euklidiese wyse aangebied word kom voor as ʼn sistematiese, deduktiewe wetenskap, maar wiskunde in wording kom voor as ʼn eksperimentele, induktiewe wetenskap.*]

Sommige definisies in die Wiskunde is baie gekompliseerd en dra moeilik by tot die skepping van konsepbeelde. Leerders benodig nietemin konsepbeelde om betekenis aan konsepte te gee en nie noodwendig konsepdefinisies nie. Die gevolg is dat konsepdefinisies nie gebruik word nie en dus in wese ʻverloreʼ gaan (Tall & Vinner 1981).

## Navorsingsvrae

Binne die raamwerk van effektiewe leer is die volgende navorsingsvrae ondersoek:

- Is die konsepbeelde van vierdejaarwiskundeonderwys-studente belyn met hul konsepdefinisies?
- Is die konsepbeelde van praktiserende onderwysers in die Gevorderde Onderwyssertifikaatkursus in Wiskunde belyn met hul konsepdefinisies?

## Navorsingsmetodologie

Verhaalnavorsing [*narrative research*] is ʼn welbekende persoonlike ervaringsmetode binne die kwalitatiewe raamwerk van navorsing. Verhaalnavorsing het ʼn lang intellektuele geskiedenis in verskeie dissiplines en is beide ʼn navorsingsvorm en ʼn navorsingsmetode (Clandinin & Connelly 2000; Craig 2006, 2008). Hierdie verhaal is onderneem in ʼn selfstudietrant en is gebaseer op my persoonlike ervarings in die onderrig van Wiskundeonderwys aan voornemende en diensdoende onderwysers. Verskeie verklarende dokumente soos Wiskundehandboeke vir skole, Wiskundevraestelle, kurrikulumdokumente en kongresverrigtinge is gebruik om die navorsingsverskynsel verhalend te beskryf en te kontekstualiseer. Die analise van die dokumente en die studente of onderwysers se response tot vrae in die vraelys het my in staat gestel om die verhaal met denke te koppel. Verhaal is dus ʼn wyse om ons in staat te stel om te weet (Carter 1993).

Die vraelys, wat ek self geadministreer het, het hoofsaaklik vrae in basiese algebra bevat. Die vrae wat in die vraelys opgeneem is, het uit jare se ervaring in Wiskundeonderrig voortgespruit. Vir meer as twee dekades het ek studente en onderwysers met hierdie vrae gekonfronteer; verlede jaar het ek besluit om die uitkoms van die selfstudie te formaliseer deur die bevindinge op te skryf. Die teikenpopulasie het bestaan uit twee groepe. Die eerste groep was vierdejaar Wiskundeonderwysstudente in 2011 (altesaam 19) en die ander groep praktiserende onderwysers (altesaam 6) wat ingeskryf het vir ʼn gevorderde sertifikaat in Wiskundeonderwys in 2011. Die vraelys het uit 10 vrae bestaan. Die respondente het die vraelys in die klas voltooi en dit het hulle min of meer 15 minute geneem om dit te doen. Die response op elkeen van die vrae was slegs ʻwaarʼ of ʻvalsʼ. Die vraelys is in die daaropvolgende periodes bespreek en daar is gedebatteer oor wat bygedra het tot die betroubaarheid en geldigheid van die vraelys. Tydens hierdie gesprek het ek voortdurend kritiese vrae gestel, en vrae na ander persone in die klas gerig, ten einde ʼn dieper begrip van die denkprosesse van die respondente te verkry. Sodoende kon ek ook die verhaal van elkeen van die deelnemers aanhoor.

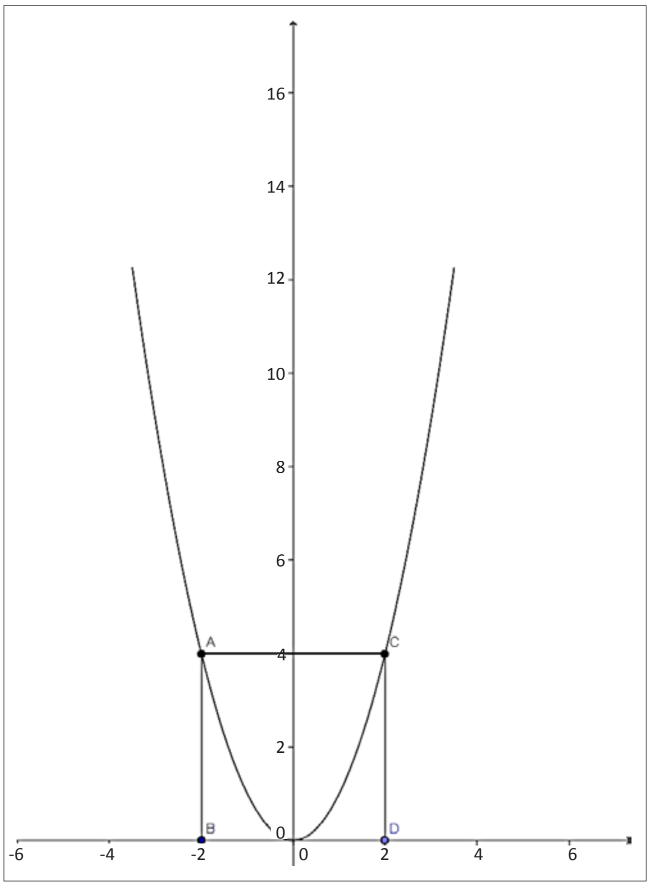
## Resultate en bespreking

Die uitkomste van die besprekings van die volgende vier bewerings is beskrywend van die student en/of onderwysers se denke, konsepbeelde, hul Wiskundekennis asook die ʻgereedskapʼ waaroor hulle beskik om ʻproblemeʼ op te los:

**Bewering 1:** As $x^2 = 4$, dan is $x = 2$

My waarneming was dat die meeste van die studente en onderwysers aangedui het dat die antwoord eintlik $x = \pm 2$ is. Sommiges het egter aangedui dat $x = 2$ die korrekte antwoord is.

Die antwoorde is verkry deur $x = 2$ in $x^2$ te stel en dus is die antwoord 4 verkry. Die meerderheid het egter geredeneer dat ʻwortels weerskante getrekʼ moet word wat die antwoord $x = \pm 2$ verskaf. Volgens hulle het hulle dit nog altyd so van skooldae af gedoen. Terloops, hierdie reël om die antwoord tot ʼn vergelyking soos hierbo genoem te kry, word deur verskeie handboeke in uitgewerkte voorbeelde so uiteengesit. Die werkswyse van worteltrekking word ook gepredik op die internet waar programme oor die oplos van vergelykings met rasionale eksponente behandel word. Toetsing waar die oplossings in die oorspronklike vergelyking gestel word, word as finale stap gesien om die finale oplossing te verifieer. My opvolgvraag was of die positiewe of die negatiewe wortel weerskante getrek moet word. Pandemonium het uitgebreek in die onderskeie klasse soos elkeen gepoog het om te verduidelik dat worteltrekking beide antwoorde verskaf. Die argument dat as die positiewe wortel getrek word die antwoord 2 is en as die negatiewe wortel getrek word, is die antwoord ook 2, nadat weerskante met -1 vermenigvuldig is, het die studente en/of onderwysers se siening in dié verband uitgedaag. Die tevredenheid van dié wat die antwoord $x = 2$ as antwoord gegee het, was nogal iets om te aanskou. In wese is hul antwoord korrek as die prosedure van worteltrekking uitgevoer word aangesien die graad van die kwadratiese vergelyking verlaag word tot dié van 'n lineêre vergelyking en 'n lineêre vergelyking maksimum een oplossing kan hê. Hul vreugde was egter van korte duur as gevolg van my bewering dat die antwoord vir die probleem $x = \pm 2$ is, aangesien 'n kwadratiese vergelyking, en nie 'n lineêre vergelyking nie, oorspronklik gegee is om op te los. Uit die gesprek het dit telkens geblyk dat die studente bloot 'n 'resep' of dan 'n algoritme toepas sonder dat betekenisgewing plaasvind. Die konsepbeeld wat gevorm is, is eng en staan verwyderd as gevolg van foutiewe netwerke wat gevorm is van die konsepdefinisie van 'n kwadratiese vergelyking. Die oplossing $x = \pm 2$ van die kwadratiese vergelyking $x^2 = 4$ is gevisualiseer deur $y = x^2$ grafies voor te stel deur van die Excel-program gebruik te maak.




**FIGUUR 1:** Grafiek van $y = x^2$.

Die studente en/of onderwysers het die twee waardes $x = \pm 2$ op die grafiek geïdentifiseer as die oplossings vir die kwadratiese vergelyking $x^2 = 4$ deurdat hulle die lyn $y = 4$ geskets het en loodlyne vanaf die snypunte op die grafiek na die x-as getrek het. My beweegrede met die gebruik van 'n grafiese voorstelling was om te poog om 'n nuwe konsepbeeld vir die oplos van kwadratiese vergelykings by studente en onderwysers te vestig en dus om die ontwikkeling van konseptuele kennis te stimuleer. Ek het die studente en onderwysers probeer aanmoedig om betekenis aan die oplos van kwadratiese vergelykings gee en dat dit nie net bloot moet gaan oor die begriplose toepassing van algoritmes en/of prosedures nie. Vanuit hierdie eksperimentele benadering het ek aan die hand van deduktiewe redenering die studente en onderwysers gelei om die wortels van $x^2 = 4$ deur middel van faktorisering te bepaal (Pólya 1945:vii). Hierdie aktiwiteite is ontwikkelingsaktiwiteite waardeur foutiewe konsepte nuut gekonstrueer kan word. Dit wou voorkom asof 'n nuwe konsepbeeld by die meerderheid studente en/of onderwysers vir die oplossing van kwadratiese vergelykings gekonstrueer is. Almal het tot die slotsom gekom dat 'n kwadratiese vergelyking twee oplossings (wat dieselfde kan wees) het, of geen oplossing nie. Sonder enige verdere vaslegging van die konsep is die volgende bewering (as probleemoplossingsaktiwiteit) in die vraelys bespreek. Ek was eintlik moedswillig met hierdie probleem, omdat ek hul denke wou uitdaag. Die doel van 'n probleemoplossingsaktiwiteit is juis om studente te dwing om uit hul gemaksone te beweeg.

**Bewering 2:** As $x^{\frac{2}{3}} = 4$, dan is $x = 8$ die enigste oplossing

Die meerderheid studente en onderwysers het $x = 8$ in die vergelyking ingestel en die antwoord '4' verkry. Die res het die antwoord geraai. Vervolgens het ek gevra waarom $x = \pm 8$ nie ook oplossings vir vergelyking $x^{\frac{2}{3}} = 4$ kan wees nie. Die waarde $x = -8$ is in die vergelyking ingestel en is toe bevind dat beide $\pm 8$ oplossings vir die vergelyking is. Van hulle het geredeneer, op grond van die vorige probleem, dat dit 'n soort kwadratiese vergelyking is en dat daar twee oplossings moet wees.

Deur middel van deduktiewe redenering het studente en/of onderwysers die vergelyking algebraïes probeer oplos. In hoofsaak is twee metodes deur studente en/of onderwysers gebruik om die vergelyking op te los. Die meerderheid het bloot teruggeval op 'worteltrekking' om die probleem op te los:

$x^{\frac{2}{3}} = 4$

$(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = (2)^2)^{\frac{3}{2}}$

$x = 2^3$

$x = 8$ [Metode 1]

Hierdie groep was opgewonde dat hulle reg is en die res nie, maar hulle kon nie verklaar waarom $x = -8$ ook die vergelyking bevredig nie.

In die bespreking in die onderskeie klasse het die studente en/of onderwysers saamgestem dat hulle hier te doen het met 'n kwadratiese vergelyking. In die vorige probleem is ooreengekom dat 'n kwadratiese vergelyking gefaktoriseer moet word om die oplossings te kan bepaal. Dieselfde prosedure is deur van die studente en onderwysers gevolg in metode 2.

$x^{\frac{2}{3}} = 4$
$(x^{\frac{2}{3}})^3 = 4^3$
$x^2 = 64$
$x^2 - 64 = 0$
$(x - 8)(x + 8) = 0$
$x = 8; x = -8$ [Metode 2]

Die grafiek in Figuur 2 het alle vertwyfeling laat verdwyn. Die studente en onderwysers se gesigsuitdrukkings was sprekend van die gesegde dat 'n prentjie meer sê as 'n duisend woorde.

Ek het opgemerk dat die studente en onderwysers senuagtig en onseker begin lag het en nie meer wou waag met die probleme wat gevolg het, om 'n antwoord te gee of te verduidelik waarom hulle 'n ja of 'n nee gekies het nie. Van die leerders wou glad nie meer in die groot groep 'n mening opper nie. 'n Duidelike vertwyfeling in hul eie vermoëns, of dan die konsepte wat hulle gevorm het, het ontstaan. Ook in hierdie geval is 'n konsepbeeld gevorm wat nie aan 'n konsepdefinisie genetwerk is nie. Prosedurele kennis in plaas van konseptuele kennis is gevorm. Die klakkelose toepassing van algoritmes geniet voorrang bo heuristiek, wat kennisbou deur middel van betekenisgewing ondersteun. Die toepassing van algoritmes het die gevaar dat konvergente denke van leerders in hoofsaak ontwikkel word. Juis daarom het ek hierdie probleem deel van die ondersoek gemaak met die doel om ook die divergente denke van studente en onderwysers te prikkel.

**Bewering 3:** As $x^3 = 8$, dan is $x = 2$ die enigste oplossing

Ek het besluit om die proses om te keer deur onmiddellik met die skets van die grafiek van $y = x^3$ te begin.

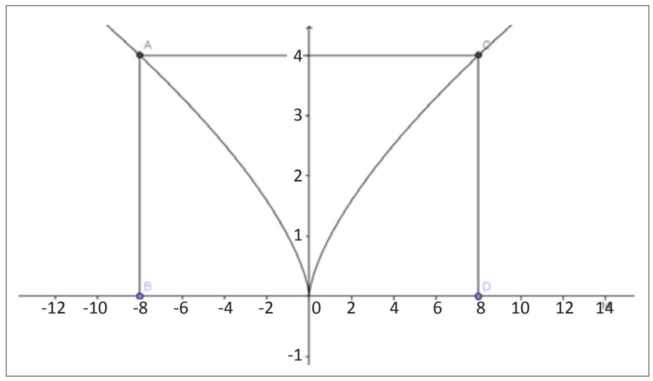
Die gemoedstoestand van beide groepe het verbeter. In gesprek het hulle verduidelik dat hulle teruggeval het na worteltrekking om die oplossing te vind en dat die grafiek vir hulle bevestig het dat hulle die korrekte prosedure gevolg het. Hierdie positiewe belewenis was van korte duur. Aan die hand van deduktiewe redenering het ek hulle gelei om $x^3 = 8$ algebraïes op te los:

$x^3 = 8$
$x^3 - 8 = 0$
$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$
$x = 2$ of $x = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$

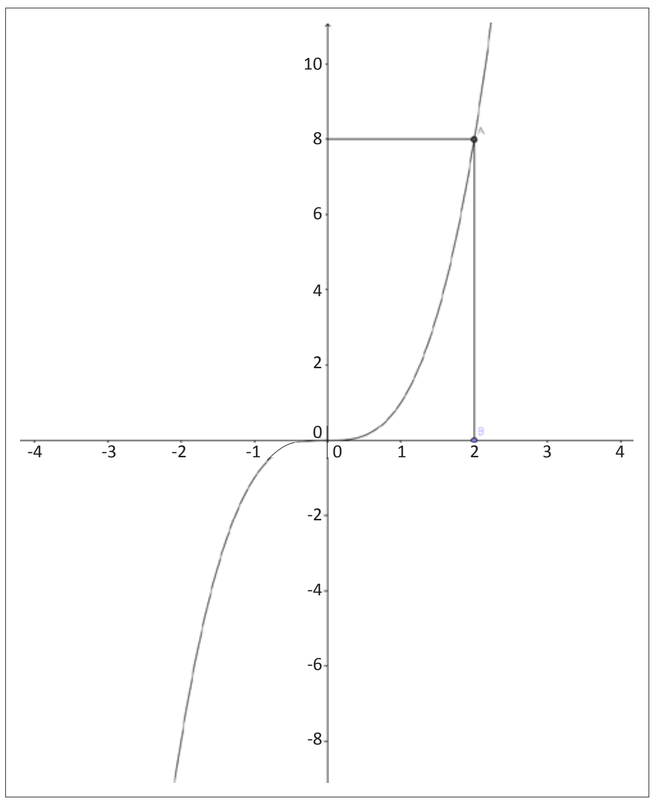
Hul antwoord was dus verkeerd aangesien hierdie vergelyking drie wortels het waarvan 1 reëel en 2 nie-reëel is.

In my analise van dokumente soos Wiskundehandboeke, kongresbydraes en vraestelle het ek gevind dat diegene wat die dokumente saamgestel het nie die volle verhaal vertel nie. In die Wiskundekurrikulum vir skole word verwys na nie-reële getalle, maar die samestellers van die dokumente verskaf slegs reële wortels as oplossings. Die konsepbeeld wat vasgelê word by leerders is dus dat 'n derdegraadse vergelyking met worteltrekking opgelos kan word en daar net een oplossing is. Die voorbeelde gee dan ook aanleiding daartoe dat leerders prosedures toepas sonder om werklik betekenis daaraan toe te voeg. Onvoldoende netwerke wat konsepbeeld met konsepdefinisie moet verbind, is gevorm. Uit my gesprek met die studente en onderwysers kon ek aflei dat hulle so te sê glad nie induktief te werk gaan met die oplos van vergelykings en ander probleme in Wiskunde nie.

Die volgende bewering is 'n verdere illustrasie van hoe handboekskrywers en ook die eksaminatore van Wiskundevraestelle daartoe bydra dat verkeerde konsepbeelde gevestig word wat los staan van konsepdefinisies as gevolg van onvoldoende netwerke. Gewoonlik word die volgende probleem in Wiskundehandboeke en ander dokumente gelys onder die opskrif *Los die volgende logaritmiese vergelykings op*:




**FIGUUR 2:** Grafiek van $y = x^{\frac{2}{3}}$.




**FIGUUR 3:** Grafiek van $y = x^3$.

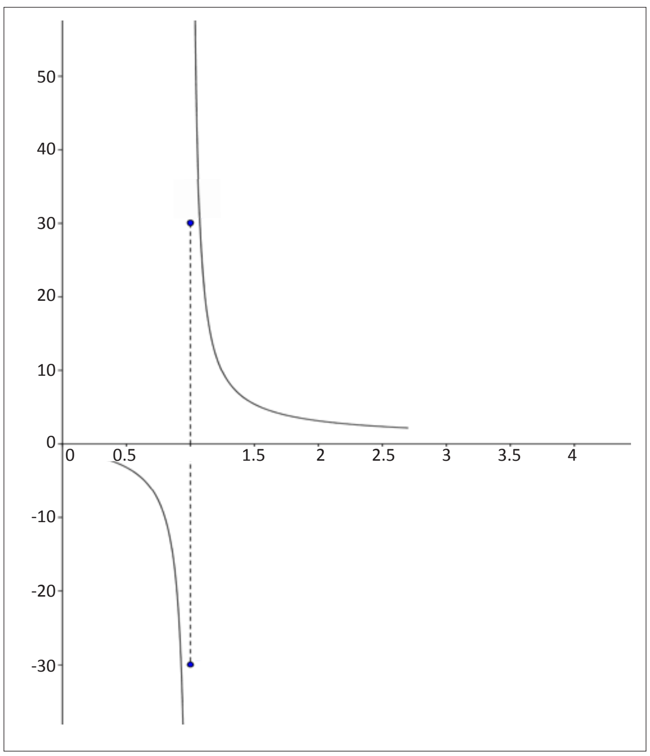
**Bewering 4:** $\log_x 9 = 2$ is ’n logaritmiese vergelyking

Ek kon sien dat beide studente en onderwysers dit eens was dat dit ’n logaritmiese vergelyking is, maar hulle wou nie ’n mening lug nie. Hulle was vertwyfeld omdat hul oortuigings oor hul Wiskundekennis ewe skielik wankelrig voorkom. Om die studente en onderwysers meer te betrek, het ek die grafiek van $y = \log_x 9$ met behulp van die Excel-program geskets.

Studente en onderwysers het aangevoor dat die grafiek nie soos ’n log-grafiek lyk nie, maar eerder soos ’n hiperbool wat geskuif het. Hulle kon dit glad nie verklaar nie. Opnuut het ek die gesprek gelei sodat die studente en onderwysers deduktief redeneer om te sien dat $y = \log_x 9$ ’n hiperboliese vergelyking is:

$$y = \log_x 9$$
$$y = \frac{\log 9}{\log_x}$$
$$y = \frac{k}{x^1}$$

In my refleksie op al vier bewerings (en ook op die response op die ander ses vrae in die vraelys) is die volgende bevind. In die studentegroep was daar slegs een student (met Wiskunde 1 as hoogste kwalifikasie in Wiskunde) wat ’n duidelike korrelasie getoon het tussen prosedurele en konseptuele kennis. Hy het algoritmes toegepas waar toepaslik en andersins het hy heuristies te werk gegaan om die probleme op te los. Die meerderheid van die studente het prosedures meganies toegepas sonder om te reflekteer op die antwoorde wat hulle verkry het. Bitter min konseptuele kennis is waargeneem. Soos telkens hierbo genoem, is konsepbeelde met onvoldoende netwerke gevestig, met die gevolg dat dit los staan van konsepdefinisies. Die studente, wat minstens oor Wiskunde op eerstejaarsvlak beskik, het getoon dat hul vakinhoudskennis nie voldoende is nie. Die uitkoms hiervan is dat hul pedagogiese inhoudskennis (PCK) gebrekkig gaan wees omrede PCK die integrering van kennissoorte is, waarvan vakkennis een is.




**FIGUUR 4:** Grafiek van $y = \log_x 9$.

Die geval van die onderwysers is meer kommerwekkend. Reëls is meganies toegepas en geen probleemoplossingsstrategieë is benut in ’n poging om die probleme op te los nie. Hulle het glad nie heuristies of induktief te werk gegaan nie. ’n Moontlike rede hiervoor is die substandaard Wiskundekennis waaroor die onderwysers beskik. Almal van hulle het hul onderwysersopleiding aan onderwyskolleges verkry en nie een van hulle het opleiding in Wiskunde bo graad 12-vlak nie. Dit is heel moontlik ’n bydraende faktor tot die gebrek aan selfvertroue wat hulle gedemonstreer het in hul pogings om die probleme op te los. Uiteraard gaan hulle ook oor gebrekkige PCK beskik.

## Samevatting

Uit die voorafgaande verhaal word verskillende fasades van Wiskunde waargeneem. Wiskunde is veel meer as ’n korpus van kennis. Wiskunde is ’n sosiale konstruksie en is soos enige ander produk van menslike denke gevul met waardes. Juis daarom is Wiskunde ook ’n menslike aktiwiteit, ’n taal, en ’n instrument om verskeie soorte probleme mee op te los. Leerders moet nie bloot algoritmes kan toepas en prosedures uitvoer nie. Daar moet ook van leerders verwag word om intellektuele buigsaamheid te toon, om rond te beweeg tussen verskillende vorme van voorbewerings, om probleme te formuleer, om situasies te modelleer, en om resultate te evalueer (MSEB 1989). Wiskunde moet nie aan leerders as ’n finale produk voorgehou word nie. Leerders moet ook die genot smaak van egte wiskundige aktiwiteite en juis daarom ís ’n induktiewe benadering waar geëksperimenteer word so belangrik, maar daarmee saam ook die genot van deduktiewe redenering wat moontlik kan lei tot die bewys van wiskundige bewerings. Doeltreffende netwerke tussen konsepbeelde en konsepdefinisies moet gevestig word. Om aan leerders hierdie soort ervaringe te bied, moet ons die aktiwiteite waaraan hulle blootgestel word, meer versoen met die soort aktiwiteite waarmee wiskundiges doenig is. Die klaskamer moet in wese getransformeer word na ’n klein wiskundige gemeenskap (Schoenfeld 1992). Sodoende kan ons bydra tot effektiewe leer in Wiskunde.

## Erkenning

### Mededingende belange

Die outeur verklaar hiermee dat hy geen finansiële of persoonlike verbintenis het met enige party wat hom nadelig kon beïnvloed in die skryf van hierdie artikel nie.

## Literatuurverwysings

Borowski, E.J. & Borwein, J.M., 1989, *Dictionary of mathematics,* Collins, Glasgow.

Carter, K., 1993, ‘The place of story in the study of teaching and teacher education’, *Educational Researcher* 22(1), 5–12, 18.

Clandinin, D.J. & Connelly, F.M., 2000, *Narrative inquiry: experience and story in qualitative research,* Jossey-Bass, San Francisco.

Cobb, P., 1988, 'The tension between theories of learning and instruction in mathematics education', *Educational pscychologist* 23(2), 87–103.

Craig, C., 2006, 'Change, changing, and being changed: a self-study of a teacher educator's becoming real in the throes of urban school reform', *Studying Teacher Education* 2(1), 105–116. http://dx.doi.org/10.1080/17425960600557538

Craig, C., 2008, 'Joseph Schwab, self-study of teaching and teacher education practice proponent? A personal perspective', *Teaching and Teacher Education* 24, 1993–2001. http://dx.doi.org/10.1016/j.tate.2008.05.008

Davis, J.D., 2005, 'Connecting procedural and conceptual knowledge of functions', *Mathematics Teacher* 99(1), 36–39.

De Corte, E. & Weinert, F.E., 1996, 'Translating research into practice', in E. de Corte & F.E. Weinert (eds.), *International encyclopedia of developmental and instructional psychology,* pp. 37–38, Wheatons Ltd., Oxford.

De Villiers, M.D., 1986, 'Heuristiese metodes van probleemoplossing', in G. Oberholzer (red.), *Agste nasionale kongres oor wiskunde-onderwys,* pp. 112–126, WGSA, Stellenbosch.

Groves, S. & Stacey, K., 1988, 'Curriculum development in problem solving', in H. Brukhardt, A. Schoenfeld, S. Groves & K. Stacey (eds.), 1984, *ICME 5 Problem solving – a world view*, pp. 199–206, The Shell Centre for Mathematical Education, Notingham.

Hiebert, J. & Lefevre, P., 1986, 'Conceptual and procedural knowledge for teaching on student achievement', in J. Hiebert (ed.)*, Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics,* pp. 1–27, Erlbaum, Hillsdale, N.J.

Hollar, J.C. & Norwood, K., 1999, 'The effects of a graphing-approach intermediate algebra curriculum on students' understanding of function', *Journal for Research in Mathematics Education* 30(2), 220–226. http://dx.doi.org/10.2307/749612

Krulik, S. & Rudnick, J.A., 1984, *A sourcebook for teaching problem solving,* Allyn & Bacon Inc., Massachusetts.

MSEB, 1989, *Everybody counts: a report to the nation on the future of mathematics education*, National Academy Press, Washington.

Muijs, D. & Reynolds, D., 2005, *Effective teaching: evidence and practice,* Sage Publications, London.

Nieuwoudt, H.D., 1989, 'Lewer goeie wiskunde onderrig dan nie goeie resultate nie?' in *Nasionale Konvensie vir Wiskunde, Natuur- en Skeikunde en Biologie Onderwys. Verrigtinge*, pp. 268–283, WGSA, Pretoria.

O'Callaghan, B.R., 1998, 'Computer-intensive algebra for students' conceptual knowledge of functions', *Journal for Research in Mathematics Education* 29(1), 21–40. http://dx.doi.org/10.2307/749716

Pólya, G., 1945, *How to solve it: a new aspect of the mathematical method*, Princeton University Press, Princeton.

Pólya, G., 1985, *How to solve it,* Princeton University Press, Princeton.

Roux, A., 2009, ''n Model vir die konseptuele leer van wiskunde in 'n dinamiese tegnologies-verrykte omgewing by voorgraadse wiskunde-onderwysstudente', Ongepubliseerde proefskrif, Noordwes-Universiteit, Potchefstroom.

Schoenfeld, A.H., 1985, *Mathematical problem solving,* Academic Press Inc., San Diego, CA. http://dx.doi.org/10.1207/s15326985ep2302_5

Schoenfeld, A.H., 1988, 'When good teaching leads to bad results: the disasters of "well-taught" mathematics courses', *Educational Psychologist* 23(2), 145–166.

Schoenfeld, A.H., 1992, 'Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics', in D.A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 334–370, Macmillan, New York.

Schultze, A, 1982, *The teaching of mathematics in secondary schools,* Macmillan & Co., Ltd., New York.

Suydam, M.N., 1980, 'Untangling clues from research on problem solving', in S. Krulik & R.E. Reys (eds.), *Problem solving in school mathematics*, pp. 34–50, NCTM, Reston.

Tall, D. & Vinner, S., 1981, 'Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity', *Educational studies in Mathematics* 12, 151–169. http://dx.doi.org/10.1007/BF00305619

Troutman, A.P. & Lichtenberg, B.K., 1995, *Mathematics: a good beginning,* Brooks/Cole Publishing Co., Boston.

Vinner, S., 1991, 'The role of definitions in teaching and learning', in D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking,* pp. 65–81, Kluwer, Dordrecht.

Vinner, S., 1992, 'The function concept as a prototype for problems in mathematics learning', in G. Harel & E. Dubinsky (eds.), *The concept of a function: aspects of epistemology and pedagogy*, pp. 195–214, Mathematical Association of America, Washington, D.C.