Vanaf die Fermat-punte na die De Villiers-punte van ’n driehoek[1]

***From the Fermat points to the De Villiers points of a triangle*[2]**

Michael de Villiers
Dept. Wiskunde, Wetenskap & Tegnologie-onderwys
Universiteit van KwaZulu-Natal
E-pos: profmd@mweb.co.za

Michael de Villiers

Michael de Villiers het ’n BSc en HOD onderskeidelik in 1977 en 1978 by die Universiteit van Stellenbosch behaal. Nadat hy wiskunde en natuurwetenskap gegee het op skole in Karasburg (Namibië) en Diamantveld (Kimberley), het hy as navorser gewerk vanaf 1983 tot 1990 by die Eenheid vir Navorsing oor Wiskunde-onderwys (ENWOUS) by die Universiteit van Stellenbosch. Gedurende hierdie tyd het hy ’n BEd (UOVS), MEd (US) en DEd (US) voltooi, en ’n jaar studieverlof gehad by Cornell Universiteit, VSA, op ’n Rotary Foundation en ’n Harry Crossley beurs. Sedert 1991 is hy by die Universiteit Durban-Westville en vanaf 2004 deel van die Universiteit van KwaZulu-Natal. Hy het reeds 7 boeke en 175 beoordeelde artikels gepubliseer. In 1988-1997 was hy redakteur van *Pythagoras*, die navorsingstydskrif van AMESA, en sedert 1997 die medevoorsitter van die SA Wiskunde Olimpiade. Hy is ’n gereelde spreker by plaaslike en internasionale konferensies oor wiskunde en wiskunde onderwys, en is al genooi as hoof gasspreker by kongresse in Spanje, Kroasië, Portugal, Taiwan, en die VSA. Sy belangrikste navorsingsbelangstellings is meetkunde, toepassings en modellering, en die geskiedenis en filosofie van wiskunde.

Michael de Villiers completed the degrees BSc and HDE respectively at the University of Stellenbosch in 1977 and 1978. After teaching mathematics and science in Karasburg (Namibia) and Diamantveld (Kimberley), he worked as researcher at the Research Unit for Mathematics Education (RUMEUS) at the University of Stellenbosch from 1983 till 1990. During this time he completed a BEd (UOFS), MEd. (US) and DEd (US), and spent a year sabbatical at Cornell University, USA, on Rotary Foundation and Harry Crossley scholarships. He was employed at the University of Durban-Westville from 1991-2003, and since 2004 he has been part of the University of KwaZulu-Natal. He has already published 7 books and 175 reviewed articles. Between 1988-1997 he was editor of *Pythagoras*, the research journal of AMESA, and since 1997, he has also been vicechair of the SA Mathematics Olympiad. He is a regular speaker at local and international conferences on mathematics and mathematics education, and has been invited as a main plenary speaker at congresses in Spain, Croatia, Portugal, Taiwan, and USA. His main research interests are Geometry, Applications and Modelling, and the History and Philosophy of Mathematics.

---

1 Referaat gelewer by die 15de Jaarlikse Kongres van AMESA, Universiteit Vrystaat, Bloemfontein, 29 Junie - 3 Julie 2009.

2 Paper delivered at the 15th Annual Congress of AMESA, University of the Free State, Bloemfontein, 29 June - 3 July 2009.

ABSTRACT

From the Fermat points to the De Villiers[3] points of a triangle

The article starts with a problem of finding a point that minimizes the sum of the distances to the vertices of an acute-angled triangle, a problem originally posed by Fermat in the 1600's, and apparently first solved by the Italian mathematician and scientist Evangelista Torricelli. This point of optimization is therefore usually called the inner Fermat or Fermat-Torricelli point of a triangle. The transformation proof presented in the article was more recently invented in 1929 by the German mathematician J. Hoffman.

After reviewing the centroid and medians of a triangle, these are generalized to Ceva's theorem, which is then used to prove the following generalization of the Fermat-Torricelli point from [3]:

> *"If triangles DBA, ECB and FAC are constructed outwardly (or inwardly) on the sides of any ΔABC so that $\angle DAB = \angle CAF$, $\angle DBA = \angle CBE$ and $\angle ECB = \angle ACF$ then DC, EA and FB are concurrent."*

However, this generalization is not new, and the earliest proof the author could trace is from 1936 by W. Hoffer in [1], though the presented proof is distinctly different. Of practical relevance is the fact that this Fermat-Torricelli generalization can be used to solve a "weighted" airport problem, for example, when the populations in the three cities are of different size. The author was also contacted via e-mail in July 2008 by Stephen Doro from the College of Physicians and Surgeons, Columbia University, USA, who was considering its possible application in the branching of larger arteries and veins in the human body into smaller and smaller ones.

On the basis of an often-observed (but not generally true) duality between circumcentres and incentres, it was conjectured in 1996 [see 4] that the following might be true from a similar result for circumcentres (Kosnita's theorem), namely: The lines joining the vertices A, B, and C of a given triangle ABC with the incentres of the triangles BCO, CAO, and ABO (O is the incentre of ΔABC), respectively, are concurrent (in what is now called the inner De Villiers point).

Investigation on the dynamic geometry program Sketchpad quickly confirmed that the conjecture was indeed true. (For an interactive sketch online, see [7]). Using the aforementioned generalization of the Fermat-Torricelli point, it was now also very easy to prove this result.

The outer De Villiers point is similarly obtained when the excircles are constructed for a given triangle ABC, in which case the lines joining the vertices A, B, and C of a given triangle ABC with the incentres of the triangles BCI_1, CAI_2, and ABI_3 (I_i are the excentres of ΔABC), are concurrent. The proof follows similarly from the Fermat-Torricelli generalization.

KEY CONCEPTS: Fermat points, De Villiers points, centroid, Ceva's Theorem, special points of triangle, concurrency

TREFWOORDE: Fermat-punte, De Villiers-punte, swaartepunt, Ceva se stelling, spesiale punte van 'n driehoek, samelopendheid

3 In August 2008, the author accidentally found out to his great surprise that two special points of a triangle have been named the De Villiers points at the *WolframMathWorld* [10] and that they are also referenced as Points 1127 and 1128 at the *Encyclopedia of Triangle Centers* [9].

OPSOMMING

Hierdie artikel beskryf die ontdekking van die sogenaamde De Villiers-punte van ’n driehoek, die bewyse wat betrokke is, en trek die historiese oorsprong terug na die Fermat-punte van ’n driehoek, die swaartepunt van ’n driehoek, en ’n nuttige veralgemening van die Fermat-punte van ’n driehoek.

INLEIDING

In Augustus 2008 het die skrywer toevallig tot sy groot verrassing op die *WolframMathWorld* webwerf [10] uitgevind dat twee spesiale punte van ’n driehoek na hom vernoem is as die De Villiers-punte, en dat daar ook na hulle verwys word as Punte 1127 en 1128 in die *Encyclopedia of Triangle Centers* [9]. Dit was egter onmiddellik amusant om op te let dat daar vandag meer as 3500 spesiale punte van die eenvoudige driehoek bekend is – so hierdie twee punte is slegs twee onder duisende!

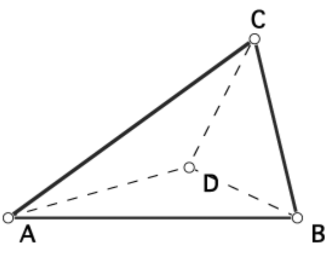
Hoe dit ook al sy, die doel van hierdie artikel is om ’n bondige historiese agtergrond te verskaf as aanloop tot die ontdekking van die punte en bewyse wat daarby betrokke is.

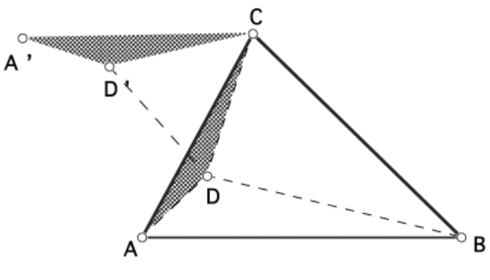
Beskou die volgende *Sketchpad* leeraktiwiteit uit [6] om mee te begin.

LUGHAWE PROBLEEM

Gestel ’n lughawe word beplan om drie stede van min of meer dieselfde grootte te bedien. Die beplanners besluit om die lughawe so te plaas dat die som van die afstande na die drie stede ’n minimum is. Waar moet die lughawe geplaas word?

DC = 2.006 cm
DB = 1.663 cm
DA = 2.653 cm
DC + DB + DA = 6.321 cm



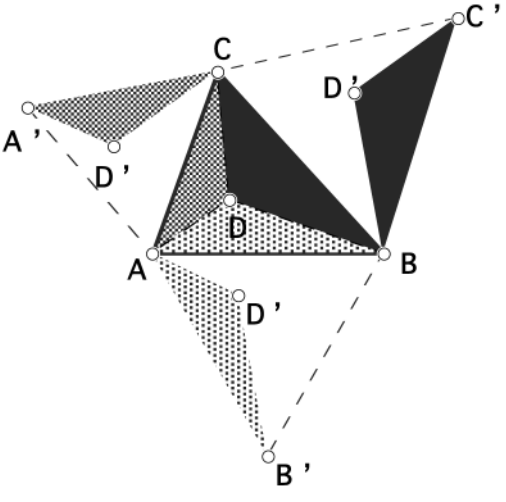


Figuur 1: *Lughawe* D *en drie stede* A, B *en* C.

Oplossing

Soos in die tweede figuur in Figuur 1 getoon, roteer driehoek ADC deur - 60° om punt C om driehoek $A'D'C$ te verkry. Uit die rotasie volg dit dat $CD = CD'$, en aangesien hoek $D'CD$ gelyk aan 60° is, volg dit dat driehoek DCD' gelyksydig is. Aangesien $AD = A'D'$ as gevolg van die rotasie, het ons nou dat $AD + CD + BD = A'D' + D'D + DB$. Maar die pad vanaf A' tot B (bv. $A'D' + D'D + DB$) sal ’n minimum wees wanneer dit reguit is, in welke geval, hoek $A'D'C = 120°$, en gevolglik is hoek $ADC = 120°$. Van simmetrie, volg dit dat die ander twee hoeke rondom D ook

120° elk is. Dus, die oplossing van die probleem is om die lughawe so te plaas dat al drie die hoeke rondom *D* gelyk is aan 120°. Dis nou nie moeilik om te sien dat *D* se posisie bepaal kan word deur gelyksydige driehoeke *A'AC*, *B'BA* en *C'CB* op die sye van driehoek *ABC* (sien Figuur 2) te konstrueer nie, en dan ontmoet die reguit lyne *A'B*, *B'C* en *C'A* by *D*.



Figuur 2: *Bepaling van posisie van lughawe*

Figuur 3: *Fermat en Torricelli.*

HISTORIESE AGTERGROND

Die punt *D* word gewoonlik die binne Fermat-punt[4] van 'n driehoek genoem na aanleiding van Pierre de Fermat wat eerste die probleem geformuleer het in die 1600's om 'n punt binne 'n *skerphoekige* driehoek te vind sodat die som van die afstande van daardie punt na die hoekpunte

[4] Die buite Fermat-punt word verkry deur die gelyksydige driehoeke na binne te konstrueer, en soortgelyk samelopende lyne *A'B*, *B'C* en *C'A* te konstrueer.

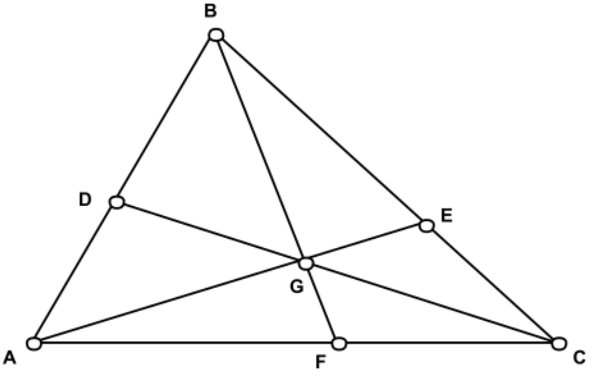
’n minimum is.[5] Histories meer korrek, behoort die punt eerder die Fermat-Torricelli punt genoem te word, aangesien die Italiaanse wiskundige en wetenskaplike Evangelista Torricelli die eerste was om die probleem op te los en voorgestel het om gelyksydige driehoeke op die sye te konstrueer om die optimale punt te bepaal. Van verdere kultuur-historiese belang is dat Italiaanse en Franse wiskundige gemeenskappe blykbaar nog steeds argumenteer oor na wie die punt eintlik vernoem moet word. Die transformasie-bewys hierbo, is egter meer onlangs in 1929 deur die Duitse wiskundige J. Hoffman ontwerp.

DIE SWAARTEPUNT VAN ’N DRIEHOEK

Die volgende fundamentele meetkunde resultaat verskyn nog in sommige skool handboeke, maar ongelukkig meesal sonder bewys: “Die drie swaartelyne van ’n driehoek is samelopend”. Hier volg nou ’n nietradisionele bewys gebaseer op areas, maar wat verder insig sal gee en lei tot ’n interessante en belangrike veralgemening.

Bewys

1. Laat *AE* en *CD* die swaartelyne wees wat by punt *G* ontmoet soos getoon in Figuur 4. Verbind *B* met *G* en verleng tot *F* op *AC*. Daar moet nou aangetoon word dat *F* die middelpunt is van *AC*. (Met ander woorde, dat *BF* ook ’n swaartelyn is en gevolglik die ander twee ontmoet in dieselfde punt *G*.)



Figuur 4: *Die swaartepunt van ’n driehoek*

[5] Wanneer een van die hoeke van die driehoek 120° of groter is, dan is die Fermat-punt (wat steeds bestaan) egter nie meer die punt wat die som van die afstande na die hoekpunte van die driehoek minimeer nie, maar word dit gevind by die hoekpunt van die stomphoekige hoek.

2. As die area van 'n driehoek met die volgende notasie aangedui word, area $ABC \leftrightarrow (ABC)$, dan volg:

$$\frac{(BAF)}{(BFC)}=\frac{\frac{1}{2}h_1AF}{\frac{1}{2}h_1FC}=\frac{AF}{FC} \text{ en } \frac{(GAF)}{(GFC)}=\frac{\frac{1}{2}h_2AF}{\frac{1}{2}h_2FC}=\frac{AF}{FC}.$$

Gevolglik: $\frac{AF}{FC}=\frac{(BAF)}{(BFC)}=\frac{(GAF)}{(GFC)}=\frac{(BAF)-(GAF)}{(BFC)-(GFC)}=\frac{(BAG)}{(BCG)}$ ... dividendo.

Soortgelyk volg: $\frac{CE}{EB}=\frac{(ACG)}{(BAG)}$ en $\frac{BD}{DA}=\frac{(BCG)}{(ACG)}$.

3. Maar dit is gegee dat $BE = EC$ en $BD = DA$. Daarom, $(BCG) = (ACG)$ en $(ACG) = (BAG)$ wat impliseer dat $(BAG) = (BCG)$. Maar die areas van hierdie twee driehoeke is proporsioneel tot AF en FC soos getoon deur die tweede vergelyking hierbo. Dus, $AF/FC = 1$ wat impliseer $AF = FC$ en voltooi die bewys.

'N TERUGBLIK: CEVA SE STELLING

Kyk nou terug na die bewys. Beskou slegs die produk van die drie verhoudings AF/FC, CE/EB en BD/DA uitgedruk in terme van areas in Stap 2. Dis dadelik duidelik dat:

$\frac{AF}{FC}\times\frac{CE}{EB}\times\frac{BD}{DA}=\frac{(BAG)}{(BCG)}\cdot\frac{(ACG)}{(BAG)}\cdot\frac{(BCG)}{(ACG)}=1\cdot$ Verder is die eienskappe dat E en D middelpunte is nooit in hierdie afleiding gebruik nie. Dit wil sê die resultaat veralgemeen onmiddellik, byvoorbeeld in enige driehoek, as die lynsegmente AE, BF en CD samelopend is (met E, F en D respektiewelik op die sye BC, AC en AB) dan is $\frac{AF}{FC}\times\frac{CE}{EB}\times\frac{BD}{DA}=1\cdot$ Die omgekeerde van die resultaat is ook waar, en kan bewys word deur *reductio ad absurdum*.[6]

Hierdie interessante, belangrike resultaat word Ceva se Stelling genoem na aanleiding van 'n Italiaanse wiskundige Giovanni Ceva (1648-1734) wat sy stelling in 1678 gepubliseer het deur swaartepunte en die wet van momente te gebruik. Ter ere van hom, word enige lyne wat die hoekpunte met enige punte op die oorstaande sye verbind, *ceviane* genoem. (Let op dat behalwe swaartelyne, is die hoogtelyne van 'n driehoek en die hoekhalveerlyne ook ceviane as hulle verleng word om die oorstaande sye te ontmoet). Die omgekeerde van Ceva se stelling is 'n kragtige stelling om 'n verskeidenheid van samelopendheid van lyne te bewys.

6 Uit 'n vakdidaktiese oogpunt kan bogenoemde area bewys van die samelopendheid van die swaartelyne as leersame voorbeeld gebruik word in 'n onderrig-leer situasie om die *ontdekkings*-funksie van 'n bewys te toon soos in [5] genoem, waardeur verdere refleksie op die bewys van 'n resultaat in die styl van Polya, somtyds tot verdere veralgemenings kan lei.

VERALGEMENING VAN DIE FERMAT-TORRICELLI PUNT

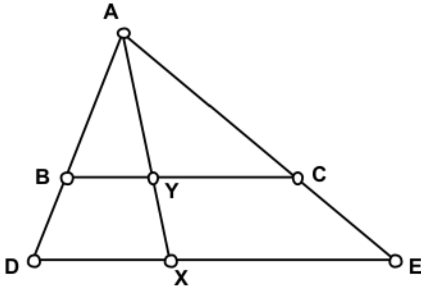
Die Fermat-Torricelli punt van ’n driehoek kan verder veralgemeen word deur onderskeidelik kongruente, gelykvormige gelykbenige, of gelykvormige driehoeke op die sye te plaas, maar hulle is almal spesiale gevalle van die volgende verdere veralgemening uit [3]:

> “As driehoeke *DBA*, *ECB* en *FAC* uitwaarts (of inwaarts) op die sye van enige ΔABC gekonstrueer word sodat $\angle DAB = \angle CAF$, $\angle DBA = \angle CBE$ en $\angle ECB = \angle ACF$ dan is *DC*, *EA* en *FB* samelopend.”

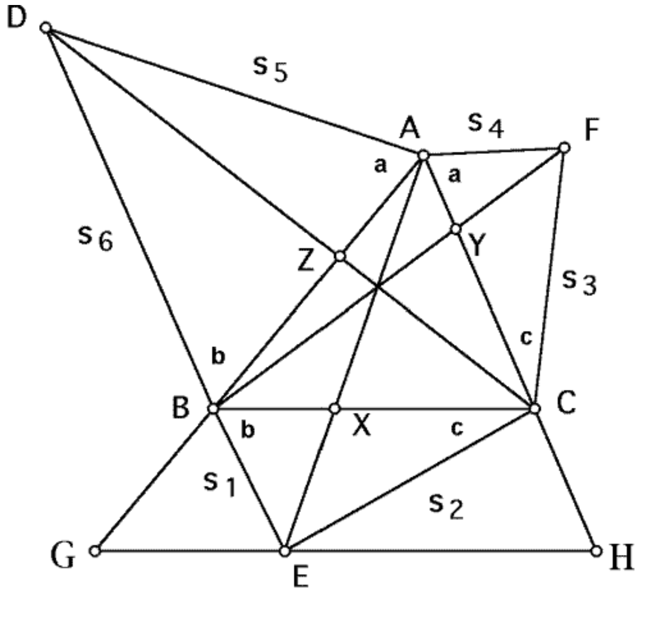
Om die resultaat te bewys, word die volgende Lemma gebruik wat hier sonder bewys gegee word.

Lemma

Driehoek *ABC* word gegee. Verleng *AB* en *AC* na *D* en *E* respektiewelik sodat *DE//BC*. Kies enige punt *Y* op *BC* en verleng *AY* na *X* op *DE* (sien Figuur 5). Dan is *BY/YC* = *DX/XE*.



Figuur 5: *Lemma*



Figuur 6: *Bewys van Fermat-Torricelli veralgemening*

Bewys van die Fermat-Torricelli veralgemening

Aanvaar dat die lyne wat samelopend bewys moet word onderskeidelik *BC, CA* en *AB* sny by *X, Y* en *Z.* Verleng *AB* na *G* en *AC* na *H* sodat *GEH* // *BC* (sien Figuur 6). Merk *BE*, *EC*, *CF*, *FA*, *AD* en *DB* respektiewelik as S_1,S_2,S_3,S_4,S_5 en S_6. Dan is $\angle BGE = \angle ABC$ en $\angle BEG = b$.

Volgens die sinus-reël:

$$\frac{GE}{\sin(\angle GBE)} = \frac{s_1}{\sin(\angle ABC)}$$
$$\frac{GE}{\sin(b+\angle ABC)} = \frac{s_1}{\sin(\angle ABC)}$$
$$GE = \frac{s_1 \sin(b+\angle ABC)}{\sin(\angle ABC)}$$

Soortgelyk volg

$$EH = \frac{s_2 \sin(c+\angle ACB)}{\sin(\angle ACB)}$$

Volgens die voorafgaande Lemma is

$$\frac{BX}{XC} = \frac{GE}{EH} = \frac{s_1 \sin(b+\angle ABC)}{\sin(\angle ABC)} \cdot \frac{\sin(\angle ACB)}{s_2 \sin(c+\angle ACB)}$$

Op soortgelyke wyse is:

$$\frac{CY}{YA} = \frac{s_3 \sin(c+\angle ACB)}{\sin(\angle ACB)} \cdot \frac{\sin(\angle CAB)}{s_4 \sin(a+\angle CAB)}$$
$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{s_5 \sin(a+\angle CAB)}{\sin(\angle CAB)} \cdot \frac{\sin(\angle ABC)}{s_6 \sin(b+\angle ABC)}$$

Daarom, $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{s_1}{s_2} \cdot \frac{s_3}{s_4} \cdot \frac{s_5}{s_6}$ ... (3)

Deur die sinus-reël ook op driehoeke *ECB*, *FAC* en *DBA* toe te pas, is

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\sin(c)}{\sin(b)}; \frac{s_3}{s_4} = \frac{\sin(a)}{\sin(c)}; \frac{s_5}{s_6} = \frac{\sin(b)}{\sin(a)}$$

Deur substitusie in (3) is $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$ sodat *AX*, *BY* en *CZ* samelopend is volgens die omgekeerde van Ceva se stelling. Maar dan is *EA*, *FB* en *DC* ook samelopend. Q.E.D.

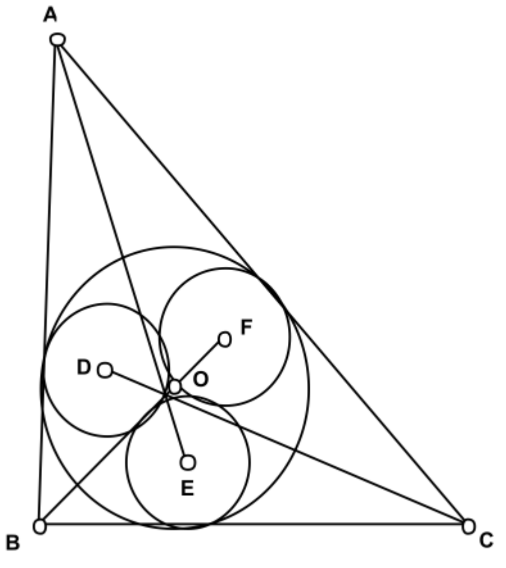
Hierdie veralgemening is egter nie nuut soos wat die skrywer aanvanklik gedink het nie, en die vroegste bewys wat die skrywer kon opspoor dateer van 1936 deur W. Hoffer in [1], maar die bogenoemde bewys is egter heeltemal verskillend. Van praktiese belang is dat hierdie Fermat-Torricelli veralgemening gebruik kan word om ’n “gelaaide” lughaweprobleem op te los, byvoorbeeld, wanneer die bevolkings in die drie stede van verskillende groottes is. Die skrywer is ook in Julie 2008 via e-pos deur Stephen Doro van Columbia University se College of Physicians and Surgeons, VSA genader oor die moontlike toepassing van hierdie veralgemening op die optimale vertakking van groter are in die menslike liggaam in kleiner en kleiner are.

DIE DE VILLIERS-PUNTE VAN 'N DRIEHOEK

Op grond van 'n dikwels waargenome (maar nie altyd geldige) dualiteit tussen insenters en omsenters, is die volgende duale hipotese in 1996 [4] geformuleer na aanleiding van 'n interessante resultaat oor sekere omsenters van 'n driehoek (Kosnita se stelling), naamlik:

> Die lyne wat die hoekpunte *A*, *B*, en *C* van 'n driehoek *ABC*, respektiewelik met die insenters van die driehoeke *BCO*, *CAO,* en *ABO* (*O* is die insenter van ΔABC) verbind, is samelopend (in wat nou die binne De Villiers-punt heet).

'n Ondersoek met die dinamiese meetkunde program *Sketchpad* het eksperimenteel bevestig dat die hipotese waar is. (Vir 'n interaktiewe skets aanlyn, kyk na [7]). Deur die voorafgaande Fermat-Torricelli veralgemening te gebruik, was dit nou baie maklik om die hipotese te bewys.

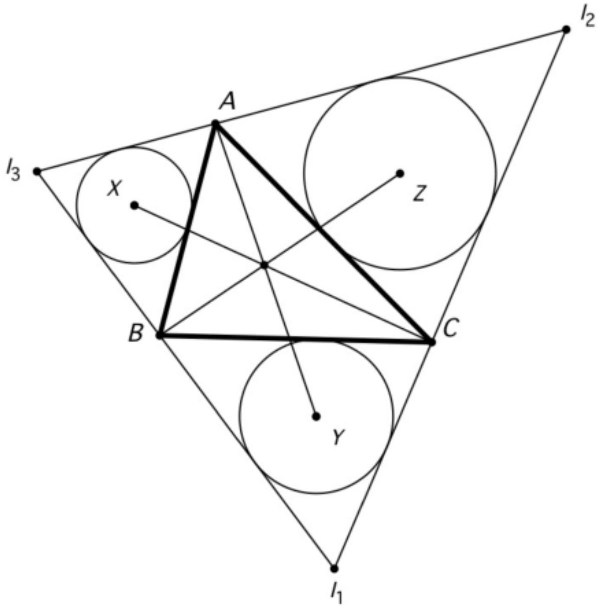


***Figuur** 7: Die binneste De Villiers-punt*

Bewys

Soos getoon in Figuur 7, volg dat $\angle DAB = \frac{1}{4}\angle A = \angle CAF$, $\angle DBA = \frac{1}{4}\angle B = \angle CBE$ en $\angle ECB = \frac{1}{4}\angle C = \angle ACF$, en van die Fermat-Torricelli veralgemening volg dit dan onmiddellik dat *DC*, *EA* en *FB* samelopend is.

Die buite De Villiers-punt word verkry wanneer die eks-sirkels gekonstrueer word soos in Figuur 8 getoon. In hierdie geval is die lyne wat die hoekpunte *A*, *B*, en *C* van 'n driehoek *ABC* onderskeidelik verbind met die insenters van driehoeke BCI_1, CAI_2, en ABI_3 (I_i is die eks-senters van ΔABC), samelopend. Die bewys volg soortgelyk direk vanaf die Fermat-Torricelli veralgemening.



***Figuur 8**: Die buite De Villiers-punt*

SLOTOPMERKINGS

Hoewel die De Villiers-punte van minimale wiskundige belang is, illustreer die voorafgaande verhaal 'n tipiese wiskundige ondersoek wat elemente van eksperimentasie, hipotesevorming, deduktiewe verifikasie en verklaring insluit. Dit toon ook dat Euklidiese meetkunde nog lank nie uitgeput is nie, en die redelik onlangse uitvinding van dinamiese meetkundeprogramme soos *Sketchpad* het hernude belangstelling in tradisionele vlakmeetkunde gestimuleer [2]. 'n Paar jaar gelede het die meetkundige June Lester [8] van Kanada ook *Sketchpad* gebruik om eksperimenteel te ontdek dat die twee Fermat-punte, nege-punt senter en die omsenter van 'n driehoek konsiklies is (op 'n sirkel lê wat nou die Lester-sirkel heet).

Die Fermat-Torricelli veralgemening op sigself is egter 'n interessante en kragtige resultaat wat beter geken behoort te word. Benewens die onderskeidelike kollineariteit van die twee De Villiers-punte met 'n aantal ander spesiale punte soos vermeld in die *Encyclopedia of Triangle Centers* [9], het die skrywer egter nog geen verdere interessante, addisionele eienskappe van die punte kon vind nie, maar dit is moontlik dat verdere eienskappe ontdek sal word.

VERWYSINGS

1. Alliston, N. (1936). *The Mathematical Snack Bar*. Cambridge, Heffer Publishers, pp. 13-14.
2. Davies, P.J. (1995). The rise, fall, and possible transfiguration of triangle geometry. *American Mathematical Monthly*, 102(3): 204-214.
3. De Villiers, M. (1995). A generalization of the Fermat-Torricelli point. *The Mathematical Gazette*, July: 374-378.
4. De Villiers, M. (1996). A dual to Kosnita's theorem. *Mathematics & Informatics Quarterly*, 6(3,) Sept:169-171.

5. De Villiers, M. (2003a). The role of proof in Sketchpad. *Rethinking Proof with Sketchpad*. Emeryville: Key Curriculum Press, pp. 5-10.
6. De Villiers, M. (2003b). Airport Problem. *Rethinking Proof with Sketchpad*. Emeryville: Key Curriculum Press, pp. 115-118.
7. De Villiers, M. (2009). Interaktiewe skets by: http://math.kennesaw.edu/~mdevilli/devillierspoints.html (Besoek, 7/8/2010)
8. Lester, J. (1997). Triangles III: Complex Triangle Functions. *Aequationes Mathematicae*, 53(4): 35.
9. Imberling, C. (no date). *Encyclopedia of Triangle Centers*. Beskikbaar aanlyn: http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html (Besoek, 7/8/2010)
10. Weisstein, E. W. (no date). *De Villiers Points*. Beskikbaar aanlyn: http://mathworld.wolfram.com/deVilliersPoints.html (Besoek, 7/8/2010)