Navorsings- en Oorsigartikels

'n Veralgemening van lokaal samehangendheid in die Topologie

H.J.K. Ohlhoff en A. Verwey
Departement Wiskunde, Universiteit van Pretoria 0002

UITTREKSEL

Die doel van hierdie artikel is om 'n aanvaarbare veralgemening van lokaal samehangendheid in die Topologie te gee. Dit word gedoen deur met behulp van die begrip "$\underline{E}$-samehangende ruimte" (kyk Preuss[3]), lokaal $\underline{E}$-samehangende ruimtes te definieer. Bekende resultate oor lokaal samehangende ruimtes word veralgemeen en in die besonder word aangetoon dat die klas van alle lokaal $\underline{E}$-samehangende ruimtes 'n bikoreflektiewe onderkategorie van $\underline{Top}$ vorm. 'n Verskeidenheid voorbeelde is beskikbaar, maar daar word veral aandag gegee aan lokaal $\underline{E}$-samehangende ruimtes teen die agtergrond van die skeidingsaksiomas.

ABSTRACT

A generalization of local connectedness in Topology

Our aim in this paper is to obtain an acceptable generalization of the concept of locally connected spaces in Topology. This is done by utilizing the concept of $\underline{E}$-connected spaces which was introduced by Preuss.[3] Locally $\underline{E}$-connected spaces are defined and results on locally connected spaces are generalized. In particular, it is shown that the class of all locally $\underline{E}$-connected spaces determines a bicoreflective subcategory of $\underline{Top}$. From the many examples that are available, we concentrate on those arising from the separation axioms.

1. AGTERGROND

1.1 Definisies

Laat (X,τ) 'n topologiese ruimte wees en laat A 'n deelversameling van X wees.

(1) Ons noem (X,τ) 'n *triviale ruimte* as X 'n versameling met hoogstens een element is.

(2) Met 'n *omgewing* V van 'n punt x van X, bedoel ons 'n oop deelversameling V van X só dat $x \in V$.

(3) Ons noem 'n punt x van X 'n *afsluitingspunt* van A as vir elke omgewing V van x geld dat $V \cap A \neq \phi$.

(4) Ons noem die versameling
$$\overline{A} = \{x \in X \mid x \text{ is 'n afsluitingspunt van } A\}$$
die *afsluiting* van die versameling A in X.

(5) Ons noem die versameling
$$Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X - A}$$
die *rand* van die versameling A in X.

(6) Ons noem die versameling
$$Int(A) = \cup\{V \subset X \mid V \text{ is 'n oop versameling in } X \text{ en } V \subset A\}$$
die *inwendige* van die versameling A in X.

1.2 Notasie

(1) Ons dui die Sierpinskiruimte, dit is enige tweepuntruimte met presies drie oop versamelings, deur S aan. Ons sal normaalweg aanneem dat S bestaan uit die versameling $\{0,1\}$ tesame met die topologie $\{\phi,\{0\},\{0,1\}\}$.

(2) Ons dui die ruimte $\{0,1\}$ met die diskrete (respektiewelik: indiskrete) topologie aan deur D_2 (respektiewelik: I_2).

(3) Ons dui die klas van alle T_0-(respektiewelik: T_1-, T_2-, $T_{2\frac{1}{2}}$-, T_3-, $T_{3\frac{1}{2}}$- en T_4-)ruimtes aan deur $\underline{D}_0$ (respektiewelik: $\underline{D}_1$, $\underline{D}_2$, $\underline{D}_{2\frac{1}{2}}$, $\underline{D}_3$, $\underline{D}_{3\frac{1}{2}}$ en $\underline{D}_4$).

(4) Ons dui die klas van alle indiskrete (respektiewelik: diskrete, triviale en topologiese) ruimtes aan deur $\underline{I}$ (respektiewelik: $\underline{D}$, $\underline{D}_t$ en $\underline{T}$).

(5) As X en Y topologiese ruimtes is, dui ons die versameling van alle kontinue funksies van X na Y aan deur C(X,Y).

2. $\underline{E}$-SAMEHANGENDHEID

Ons neem deurgaans aan dat $\underline{E}$ 'n nie-leë klas topologiese ruimtes is.

2.1 Definisies

(1) Ons sê 'n topologiese ruimte X is $\underline{E}$-*samehangend* as C(X,E) vir elke $E \in \underline{E}$ slegs uit konstante funksies bestaan.

(2) Ons sê 'n deelversameling van 'n topologiese ruimte X is $\underline{E}$-samehangend as dit as deelruimte van X $\underline{E}$-samehangend is.

(3) Ons dui die klas van alle $\underline{E}$-samehangende ruimtes aan deur $c(\underline{E})$.

(4) Die $\underline{E}$-*komponent* van 'n topologiese ruimte X wat die punt x van X bevat, is die vereniging van al die $\underline{E}$-samehangende deelversamelings van X wat x bevat.

(5) Die $\underline{E}$-*kwasiekomponent* van 'n topologiese ruimte X wat die punt x van X bevat, is die versameling $\{y \in |X| \mid$ vir elke $E \in \underline{E}$ en vir elke $f \in C(X,E)$ is $f(y) = f(x)\}$.

Die bewerings in die volgende stelling is deur Preuss[3] bewys.

2.2 Stelling

(1) Die kontinue beeld van 'n $\underline{E}$-samehangende versameling is 'n $\underline{E}$-samehangende versameling.
(2) Die vereniging van enige familie $\underline{E}$-samehangende deelversamelings van 'n topologiese ruimte X wat minstens een punt in gemeen het, is 'n $\underline{E}$-samehangende deelversameling van X.
(3) Die topologiese produk van $\underline{E}$-samehangende ruimtes is 'n $\underline{E}$-samehangende ruimte.
(4) Elke triviale ruimte is 'n $\underline{E}$-samehangende ruimte.
(5) As $\underline{E}$ en $\underline{G}$ twee klasse topologiese ruimtes is só dat $\underline{E} \subset \underline{G}$, dan is $c(\underline{G}) \subset c(\underline{E})$.
(6) Elke $\underline{E}$-komponent van X is 'n $\underline{E}$-samehangende deelversameling van X.
(7) Die $\underline{E}$-komponente van X vorm 'n partisie van X.
(8) As $\underline{E}$ 'n klas T_1-ruimtes is, is elke $\underline{E}$-komponent van X 'n geslote deelversameling van X.
(9) Die $\underline{E}$-kwasiekomponente van X vorm 'n partisie van X. □

3. KARAKTERISERINGS VAN LOKAAL $\underline{E}$-SAMEHANGENDE RUIMTES

3.1 Definisies

(1) 'n Topologiese ruimte X word *lokaal $\underline{E}$-samehangend* genoem as daar vir elke punt x van X en elke omgewing G van x 'n oop $\underline{E}$-samehangende deelversameling V van X bestaan só dat $x \in V \subset G$.
(2) 'n Deelversameling van 'n topologiese ruimte X word lokaal $\underline{E}$-samehangend genoem as dit as deelruimte van X lokaal $\underline{E}$-samehangend is.
(3) Die klas van alle lokaal $\underline{E}$-samehangende ruimtes word deur $\ell(\underline{E})$ aangedui.

3.2 Voorbeelde

Aangesien elke triviale ruimte $\underline{E}$-samehangend is, volg dat
(1) Elke diskrete ruimte lokaal $\underline{E}$-samehangend is.
(2) Elke topologiese ruimte lokaal $\underline{D}_t$-samehangend is.

3.3 Stelling

'n Topologiese ruimte (X,τ) is lokaal $\underline{E}$-samehangend as en slegs as τ 'n basis het wat uit (oop) $\underline{E}$-samehangende deelversamelings van X bestaan.

Bewys Kyk Dugundji,[1] Hoofstuk III, Stelling 2.2. □

3.4 Stelling

'n Topologiese ruimte X is lokaal $\underline{E}$-samehangend as en slegs as elke $\underline{E}$-komponent van elke oop deelversameling van X 'n oop deelversameling van X is.

Bewys Die bewys is soortgelyk aan die bewys van Dugundji,[1] Hoofstuk V, Stelling 4.2. □

3.5 Stelling

'n Topologiese ruimte X is lokaal $\underline{E}$-samehangend as en slegs as vir elke deelversameling Y van X en elke $\underline{E}$-komponent C van Y geld dat $Fr(C) \subset Fr(Y)$.

Bewys Gestel X is lokaal $\underline{E}$-samehangend en laat C 'n $\underline{E}$-komponent van 'n deelversameling Y van X wees. Volgens Dugundji,[1] Hoofstuk III, Stelling 4.11 (3) is $Fr(C) = \overline{C} \cap \overline{X - C} \subset [Int(Y) \cup Fr(Y)] \cap \overline{X - C}$. As $x \in Fr(C)$ en $x \notin Fr(Y)$ bestaan daar 'n oop $\underline{E}$-samehangende omgewing U van x só dat $x \in U \subset Int(Y)$. Aangesien $U \cap C \neq \phi$ is $U \cup C$ 'n $\underline{E}$-samehangende deelversameling van Y en dus is $U \cup C \subset C$. Dan is $U \cap (X - C) = \phi$ wat 'n teenstrydigheid is, want $x \in \overline{X - C}$. Dus is $x \in Fr(Y)$.

Omgekeerd: Laat C 'n $\underline{E}$-komponent van 'n oop deelversameling G van X wees. Aangesien $Fr(C) \subset Fr(G)$ is $C \cap Fr(C) \subset G \cap Fr(G)$ en volgens Dugundji,[1] Hoofstuk III, Stellings 4.11 en 4.9 is $C \cap [\overline{C} - Int(C)] = C \cap Fr(C) \subset Int(G) \cap Fr(G) = \phi$. Dus is $C = Int(C)$ en aangesien C 'n oop deelversameling is, is X lokaal $\underline{E}$-samehangend. □

3.6 Stelling

'n Topologiese ruimte X is lokaal $\underline{E}$-samehangend as en slegs as vir elke deelversameling Y van X en vir elke $\underline{E}$-komponent C van Y geld dat $Int(C) = C \cap Int(Y)$. □

4. EIENSKAPPE VAN LOKAAL $\underline{E}$-SAMEHANGENDE RUIMTES

4.1 Stelling

Laat X en Y topologiese ruimtes wees.

As $p: X \rightarrow Y$ 'n kwosiëntfunksie en X 'n lokaal $\underline{E}$-samehangende ruimte is, is Y lokaal $\underline{E}$-samehangend.

Bewys Laat C 'n $\underline{E}$-komponent van 'n oop deelversameling G van Y wees en $x \in p^{-1}(C)$. Dan is $x \in p^{-1}(G)$ en $p^{-1}(G)$ is oop in X, want p is 'n kwosiëntfunksie. Laat D die $\underline{E}$-komponent van x in $p^{-1}(G)$ wees. Volgens Stelling 2.2 is p(D) 'n $\underline{E}$-samehangende deelversameling van Y. Verder is $p(D) \subset G$ en aangesien C 'n $\underline{E}$-komponent van G is met $p(x) \in C$, is $p(D) \subset C$. Dus is $D \subset p^{-1}p(D) \subset p^{-1}(C)$. Volgens Stelling 3.4 is D 'n oop versameling in X en $x \in D \subset p^{-1}(C)$. Dus is $p^{-1}(C)$ oop in X en aangesien p 'n kwosiëntfunksie is, volg dat C 'n oop deelversameling van Y is. Uit Stelling 3.4 volg dus dat Y lokaal $\underline{E}$-samehangend is. □

4.2 Stelling

Elke oop deelversameling van 'n lokaal $\underline{E}$-samehangende ruimte is lokaal $\underline{E}$-samehangend.

Bewys Kyk Dugundji,[1] Hoofstuk III, Stelling 7.3. □

4.3 Stelling

As X 'n lokaal $\underline{E}$-samehangende topologiese ruimte is, geld dat elke $\underline{E}$-komponent van X 'n oop en geslote deelversameling van X is.

Bewys Laat C 'n $\underline{E}$-komponent van X wees. Volgens Stelling 3.4 is C 'n oop deelversameling van X. As $x \in \overline{C}$ bestaan daar 'n $\underline{E}$-samehangende omgewing

U van x en aangesien $U \cap C \neq \phi$, is $U \cup C$ 'n $\underline{E}$-samehangende deelversameling van X. Dus is $U \cup \bar{C} \subset C$ en dus is $C = \bar{C}$ 'n geslote deelversameling van X. □

4.4 Stelling

Laat $\{X_i | i \in I\}$ 'n familie topologiese ruimtes wees. Die volgende bewerings is ekwivalent.

(1) Die produkruimte ΠX_i is lokaal $\underline{E}$-samehangend.
(2) Die ruimte X_i is vir elke $i \in I$ lokaal $\underline{E}$-samehangend en daar is hoogstens 'n eindige aantal $i \in I$ só dat X_i nie $\underline{E}$-samehangend is nie.

Bewys Die bewys is soortgelyk aan die bewys van Dugundji,[1] Hoofstuk V, Stelling 4.3. □

4.5 Stelling

As $\{V_i | i \in I\}$ 'n familie oop lokaal $\underline{E}$-samehangende deelversamelings van 'n topologiese ruimte X is, is $V = \cup V_i$ ook 'n lokaal $\underline{E}$-samehangende deelversameling van X.

Bewys Dit is duidelik dat V 'n oop deelversameling van X is. Laat G 'n oop deelversameling van V wees en $x \in G$. Daar bestaan 'n $i \in I$ só dat $x \in V_i$ en dus is $x \in V_i \cap G$, wat 'n oop deelversameling van V_i is. Daar bestaan dus in V_i 'n oop $\underline{E}$-samehangende versameling U só dat $x \in U \subset V_i \cap G$. Dus is $U = U \cap V$ in V 'n oop $\underline{E}$-samehangende versameling só dat $x \in U \subset G$ en dus is V lokaal $\underline{E}$-samehangend. □

4.6 Gevolg

Die klas van alle lokaal $\underline{E}$-samehangende ruimtes vorm 'n bikoreflektiewe onderkategorie van die kategorie $\underline{\mathrm{Top}}$ van topologiese ruimtes en kontinue funksies.

Bewys Volgens Herrlich en Strecker[2] is die koproduk in $\underline{\mathrm{Top}}$ die topologiese som. Dus volg uit Dugundji,[1] Hoofstuk VI, Stellings 8.4 en 8.2 en Stelling 4.5 dat die koproduk van lokaal $\underline{E}$-samehangende ruimtes lokaal $\underline{E}$-samehangend is. Volgens Herrlich en Strecker[2] is 'n ko-gelykmaker in $\underline{\mathrm{Top}}$ 'n kwosiëntfunksie en dus volg uit Stelling 4.1 dat die klas van alle lokaal $\underline{E}$-samehangende ruimtes geslote is onder die vorming van ko-gelykmakers in $\underline{\mathrm{Top}}$. Dit is bekend dat die volgende bewerings ekwivalent is vir enige onderkategorie $\underline{C}$ van $\underline{\mathrm{Top}}$.

(1) $\underline{C}$ is koreflektief.
(2) $\underline{C}$ is bikoreflektief.
(3) $\underline{C}$ is geslote onder die vorming van koprodukte en ko-gelykmakers in $\underline{\mathrm{Top}}$. □

4.7 Stelling

Die snyding van 'n eindige aantal oop lokaal $\underline{E}$-samehangende deelversamelings van 'n topologiese ruimte is lokaal $\underline{E}$-samehangend.

Bewys Die resultaat volg uit Stelling 4.2. □

4.8 Stelling

As 'n topologiese ruimte X lokaal $\underline{E}$-samehangend is, is die $\underline{E}$-kwasiekomponente van X oop en geslote deelversamelings van X.

Bewys Dit is duidelik dat die resultaat vir triviale ruimtes geld. Aanvaar dus dat X 'n nie-triviale ruimte is.

Laat x 'n punt van X wees, Q die $\underline{E}$-kwasiekomponent van x in X en $y \in \overline{X - Q}$. Aangesien X lokaal $\underline{E}$-samehangend is bestaan daar 'n $\underline{E}$-samehangende omgewing, sê V, van y. Dan is $V \cap (X - Q) \neq \phi$ en dus bestaan daar 'n $z \in V$ só dat $z \notin Q$. Dus bestaan daar 'n $E \in \underline{E}$ en $f \in C(X,E)$ só dat $f(z) \neq f(x)$. Aangesien V $\underline{E}$-samehangend is geld dat $f(z) = f(y)$. Gevolglik is $f(x) \neq f(y)$ en dus is $y \in X - Q$. Dan is $X - Q = \overline{X - Q}$ 'n geslote deelversameling van X en dus is Q 'n oop deelversameling van X.

Uit Stelling 2.2 volg dat $Q = X - \cup\{Q_i | Q_i$ is 'n $\underline{E}$-kwasiekomponent van X en $Q \neq Q_i\}$. Aangesien elke Q_i 'n oop deelversameling van X is, geld dat Q 'n geslote deelversameling van X is. □

Ons weet dat die $\underline{E}$-komponente en $\underline{E}$-kwasiekomponente van 'n ruimte gewoonlik verskillend is (kyk Voorbeeld 115 van Steen en Seebach.[5])

4.9 Stelling

Die $\underline{E}$-komponente van 'n lokaal $\underline{E}$-samehangende ruimte is presies die $\underline{E}$-kwasiekomponente van die ruimte.

Bewys Dit is duidelik dat die resultaat vir triviale ruimtes geld. Aanvaar dus dat X 'n nie-triviale lokaal $\underline{E}$-samehangende ruimte is. Laat x 'n punt van X wees en C en Q onderskeidelik die $\underline{E}$-komponent en $\underline{E}$-kwasiekomponent van x in X. Dit is duidelik dat $C \subset Q$.

Laat $E \in \underline{E}$ en $f \in C(Q,E)$. As E 'n triviale ruimte is volg dat f 'n konstante funksie is. Gestel dus E is 'n nie-triviale ruimte. Laat e 'n vaste element van E wees en definieer die funksie $g: X \to E$ deur

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{as } z \in Q \\ e & \text{as } z \notin Q. \end{cases}$$

Dan is g 'n kontinue funksie.

Laat a en b verskillende elemente van Q wees. Dan is $g(a) = g(b)$ en aangesien $g|Q = f$ volg dat f 'n konstante funksie is. Dus is Q 'n $\underline{E}$-samehangende deelversameling van X wat x bevat en dus is $Q \subset C$. □

4.10 Stelling

Laat $\underline{E}$ en $\underline{G}$ nie-leë klasse topologiese ruimtes wees met $\underline{G} \subset \underline{E}$. As 'n topologiese ruimte X lokaal $\underline{E}$-samehangend is, is X ook lokaal $\underline{G}$-samehangend, dit wil sê $\mathfrak{l}(\underline{E}) \subset \mathfrak{l}(\underline{G})$. □

4.11 Stelling

As $\underline{E}$ 'n klas is wat 'n nie-triviale ruimte bevat, is elke lokaal $\underline{E}$-samehangende ruimte lokaal samehangend.

Bewys Volgens Preuss[3] is elke $\underline{E}$-samehangende ruimte ook samehangend. □

4.12 Opmerking

'n Lokaal samehangende ruimte is nie noodwendig lokaal $\underline{E}$-samehangend nie, soos die volgende voorbeeld illustreer. Laat $\underline{E} = \{S\}$. Die ruimte S is lokaal samehangend maar nie lokaal $\underline{E}$-samehangend nie.

5. VOORBEELDE VAN LOKAAL $\underline{E}$-SAMEHANGENDE RUIMTES

5.1 Stelling

Laat $\underline{D}$ die klas van alle diskrete topologiese ruimtes wees en $\underline{G}$ 'n klas indiskrete topologiese ruimtes met $I_2 \in \underline{G}$. Dan is

$$\underline{D} = \ell(\underline{T}) = \ell(\underline{G}) = \ell\{I_2\}.$$

Bewys Volgens Voorbeeld 3.2 en Stelling 4.10 is $\underline{D} \subset \ell(\underline{T}) \subset \ell(\underline{G}) \subset \ell\{I_2\}$. Volgens Preuss[4] is die $\{I_2\}$-samehangende ruimtes presies die triviale ruimtes en dus volg uit Stelling 3.4 dat $\ell\{I_2\} \subset \underline{D}$. □

5.2 Stelling

Laat $\underline{E}$ 'n klas T_0-ruimtes wees só dat $S \notin \underline{E}$. Die volgende drie bewerings is vir 'n topologiese ruimte X ekwivalent.

(1) Die ruimte X is lokaal $\underline{E}$-samehangend.
(2) Elke oop deelversameling van X is 'n geslote deelversameling van X.
(3) Elke geslote deelversameling van X is 'n oop deelversameling van X.

Bewys Volgens Preuss[4] is die $\underline{E}$-samehangende ruimtes presies die indiskrete ruimtes.

(1) $\Rightarrow$ (2): Laat U 'n oop deelversameling van X wees en laat $x \in \overline{U}$. Aangesien X lokaal $\underline{E}$-samehangend is bestaan daar 'n $\underline{E}$-samehangende omgewing V van x. Aangesien V 'n indiskrete ruimte is en $V \cap U \neq \phi$, is $V \cap U = V$. Dus is $U = \overline{U}$ 'n geslote deelversameling van X.

(2) $\Rightarrow$ (3): Triviaal.

(3) $\Rightarrow$ (1): Vir elke $x \in X$ volg dat $\overline{\{x\}}$ $\underline{E}$-samehangend is. As G 'n omgewing van die punt x van X is, is $\overline{\{x\}}$ 'n oop $\underline{E}$-samehangende versameling met $x \in \overline{\{x\}} \subset G$. □

5.3 Stelling

As $\{S\} \subset \underline{E} \subset \underline{D}_0$ is $\ell(\underline{E}) = \{X \mid \text{elke } \underline{E}\text{-komponent van X is 'n oop deelversameling van X}\}$.

Bewys As $X \in \ell(\underline{E})$ is elke $\underline{E}$-komponent van X 'n oop deelversameling van X.

Gestel elke $\underline{E}$-komponent van X is oop in X. Laat G 'n omgewing van 'n punt x van X wees. Die $\underline{E}$-komponent C van x in X is 'n indiskrete ruimte (kyk Stelling 5.2) en dus is $C \cap G = C$. Dus is X lokaal $\underline{E}$-samehangend. □

5.4 Opmerkings

(1) Laat $\underline{E}$ en $\underline{G}$ nie-leë klasse topologiese ruimtes wees. As $c(\underline{E}) = c(\underline{G})$ volg dat $\ell(\underline{E}) = \ell(\underline{G})$. Uit die resultate in Preuss[4] volg dus:
 (i) $\ell(\underline{D}_{3\frac{1}{2}}) = \ell(\underline{D}_4) = \ell\{\mathbb{R}\} = \ell\{[0,1]\}$.
 (ii) $\ell(\underline{D}) = \ell\{D_2\} = \{X \mid X \text{ is lokaal samehangend}\}$.

(2) In onderstaande diagram word die verbande wat daar (volgens Stelling 4.10) tussen die klasse $\ell(\underline{D}_i)$ bestaan, aangedui. Die nommers verwys na voorbeelde in 5.5 wat aandui dat die verbande in die diagram in die algemeen nie omkeerbaar is nie. Dit is nog 'n ope vraag of die klasse $\ell(\underline{D}_2)$, $\ell(\underline{D}_{2\frac{1}{2}})$, $\ell(\underline{D}_3)$ en $\ell(\underline{D}_4)$ wel vier verskillende klasse is. Voorbeeld (5) toon dat die klasse $\ell(\underline{D}_2)$ en $\ell(\underline{D}_3)$ minstens verskil.

$$\begin{array}{c}
\ell(I) = \ell\{I_2\} = \ell(\underline{T}) = \underline{D} \\
\downarrow (1) \\
\ell\{S\} = \ell(\underline{D}_0) \\
\downarrow (2) \\
\ell(\underline{D}_1) \\
\downarrow (3) \\
\ell(\underline{D}_2) \\
\downarrow \\
\ell(\underline{D}_{2\frac{1}{2}}) \\
\downarrow \\
\ell(\underline{D}_3) \\
\downarrow \\
\ell\{[0,1]\} = \ell\{\mathbb{R}\} = \ell(\underline{D}_{3\frac{1}{2}}) \\
\| \\
\ell(\underline{D}_4) \\
\downarrow (4) \\
\ell\{X \mid X \text{ is diskreet}\} = \ell\{D_2\} = \{X \mid X \text{ is lokaal samehangend}\} \\
\downarrow \\
\ell(\underline{D}_t) = \underline{T}
\end{array}$$

5.5 Voorbeelde

(1) Beskou die ruimte (X, τ) waar $X = \{1,2,3,4\}$ en $\tau = \{X, \phi, \{1,2\}, \{3,4\}\}$. Volgens Stelling 3.3 is $X \in \ell(\underline{D}_0)$ maar aangesien $X \notin \underline{D}$ volg dat $X \notin \ell(\underline{T})$.

(2) Aangesien S $\underline{D}_1$-samehangend is en $\{\{0\}, \{0,1\}\}$ 'n basis vir S is, volg dat $S \in \ell(\underline{D}_1)$.
 Die $\underline{D}_0$-komponent van 1 in S is $\{1\}$ en dus is $S \notin \ell(\underline{D}_0)$.

(3) Laat X die ruimte wees wat in Voorbeeld 18 van Steen en Seebach[5] gekonstrueer is.
 Aangesien $X \in \underline{D}_1$ maar $X \notin \underline{D}$ is $X \notin \ell(\underline{D}_1)$.
 Elke oop deelversameling van X is $\underline{D}_2$-samehangend en dus is $X \in \ell(\underline{D}_2)$.

(4) Die ruimte $\mathbb{R}$ met die gewone topologie is lokaal samehangend en dus is $\mathbb{R} \in \ell(\underline{D}_2)$.
 Aangesien die $\{\mathbb{R}\}$-komponente van $\mathbb{R}$ eenpunt versamelings is, volg dat $\mathbb{R} \notin \ell\{\mathbb{R}\} = \ell(\underline{D}_4)$.

(5) Laat X die ruimte wees wat in Voorbeeld 61 van Steen en Seebach[5] gekonstrueer is. Daar is bewys dat X 'n aftelbare samehangende T_2-ruimte is wat ook lokaal samehangend is en dus is $X \notin \ell(\underline{D}_2)$.
 Laat G 'n omgewing van 'n punt x van X wees. Daar bestaan dus 'n oop samehangende deelversameling U van X só dat $x \in U \subset G$. Volgens Verwey,[6] Stelling 8.5(2) is U $\underline{D}_3$-samehangend en dus is $X \notin \ell(\underline{D}_3)$.

LITERATUURVERWYSINGS

1. Dugundji, J. (1966). *Topology* (Allyn and Bacon).
2. Herrlich, H. & Strecker, G.E. (1973). *Category Theory* (Allyn and Bacon).
3. Preuss, G. (1970). E-zusammenhängende Räume, *Manuscripta Math*, 3, 331-342.
4. Preuss, G. (1971). Eine Galois-korrespondenz in der Topologie. *Monatsh Math*, 75, 447-452.
5. Steen, L.A. & Seebach, J.A. (1978). *Counterexamples in Topology*, second edition (Springer-Verlag).
6. Verwey, A. (1981). *Aspekte van $\underline{E}$-samehangendheid in die kategorie van topologiese ruimtes.* Verhandeling, U.P.